

תרגילים/ביסודות תורת הפונקציות המרוכבות

1. הוכח את הנוסחה לחישוב צמודה הרמונית של $u(x, y)$:

$$v(x, y) = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt - \int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(s, 0) ds$$

2. הוכח כי הפונקציה $u(x, y) = y \cos y \sinh x + x \sin y \cosh x$ הרמונית, ומצא צמודה הרמונית.

3. נניח כי הפונקציות $u(x, y), v(x, y)$ הרמוניות ב- Ω (נזכור כי הנגזרות החלקיות רציפות). נניח בנוסף כי מתקיימות משוואות קושי-רימן. בהנחה ש $u^2 + v^2 \neq 0$, הוכח כי:

$$\Delta \left(\frac{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x}}{u^2 + v^2} \right) = 0$$

4. הוכח את הנוסחה לאופרטור לפלס בקואורדינטות קוטביות:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

5. תהא $u(r, \theta) = r\theta \cos \theta + r \sin \theta \ln r$ מוגדרת ב- $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. הראו כי u הרמונית ומצאו צמודה הרמונית ל- u .

6. תהא $U(\xi)$ רציפה וחסומה ב- \mathbb{R} . הראו כי $P_U(x, y)$ מייצגת פונקציה הרמונית בחצי המישור העליון כאשר ערכי $U(\xi)$ הם ב- \mathbb{R} , אם:

$$P_U(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} U(\xi) d\xi$$

7. הוכח כי אם $f(z)$ שלמה ומקיימת $\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-1} \operatorname{Re} f(z) = 0$ אזי $f(z)$ הינה קבועה. רמז: השתמש בנוסחת שוורץ,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \frac{\xi + z}{\xi - z} u(\xi) \frac{d\xi}{\xi} + iC$$

8. הראו כי אם $f(z)$ אנליטית ב- $B_{1.1}(0) = \{z : |z| < 1.1\}$ ומקיימת $|f(z)| = 1$ לכל $|z| = 1$ אזי $f(z)$ הינה פונקציה רציונאלית.